第16卷第2期 数学进展 Vol.16, No.2
1987年4月 ADVANCES IN MATHEMATICS April., 1987

评潘承洞、潘承彪著"哥德巴赫猜想"

王 元

(中国科学院数学研究所)

潘承洞、潘承彪的专著"哥德巴赫猜想"(科学出版社，纯粹数学与应用数学数学专著丛书、第7号，1981)出版以来，在国内外已有相当影响与高度评价(见[1,2])。

哥德巴赫猜想导源于哥德巴赫在1742年给欧拉的一封信，在这封信中，他提出了表整数为素数和的两个猜想，用略为修改的语言可以将它们表述为：

(A)每一偶数$\geqslant 6$都是两个奇素数之和。

(B)每一奇数$\geqslant 9$都是三个奇素数之和。

命题(B)是命题(A)的推论。

在1900年第二届国际数学家大会上，希尔伯特在他的著名演讲中，首先阐明了寻找一个好的数学问题，作为数学研究的对象与泉源，对于推动数学的发展是何等重要！他特别列举费马猜想为例子，他指出"这样一个非常特殊，似乎不十分重要的问题会对科学产生怎样令人鼓舞的影响，受费马问题的启发，库末尔引进了理想数，并发现了把一个分园域的数分解为素理想因子的唯一分解定理，这定理今天已被戴德金与克隆尼克推广到任意代数数域，在近代数论中占着中心地位，其意义已远远超出数论的范围而深入到代数和函数论的领域"(见[3])。为此，希尔伯特向二十世纪的数学家提出了二十三个问题。历史的发展证明了这些问题的重要性。恰如上述，它们在相当程度上，推动了纯粹数学的发展，其根本意义在于伴随着这些问题研究的进展，一些重要的数学概念与强有力的并带有一般性的数学方法产生了。

到上世纪末，分析方法，特别是复变函数论用于数论，使数论产生了深刻的变化而进入一个新的阶段；解析数论趋于成熟并有相当深度，特别是素数分布理论方面的成就更为突出。例如车比雪夫证明了不超过x的素数个数$\pi(x)$的无穷大阶为$\frac{x}{\log x}$,狄里希勒证明了任何公差与首项互素的算术级数中含有无穷多素数，黎曼更指出了有关素数分布的一些问题与一个单纯函数$\zeta(s)$的零点分布之间有着各种深刻的内在联系，此处$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ $(s=\sigma+it,\ \sigma>1)$；当$\sigma\leqslant 1$时，可以用解析延拓来定义$\zeta(s)$。黎曼特别指出，$\zeta(s)$在半平面$\sigma>0$上的零点皆位于直线$\sigma=1/2$上。这个猜想已被愈来愈多的数学家认为是纯数学中最有挑战性的问题之一。除这个猜想外，黎曼的其他猜想均被阿达玛与冯.曼哥尔德证明了。从而阿达玛与

1986年8月30日收到。

德、拉、瓦里、普桑独立地证明了高斯与勒让德尔的猜想，$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$。这又称为"素数定律"，证明过程中，大量用到复变函数论，特别是整函数理论。

希尔伯特高瞻远瞩，预见到黎曼猜想的研究将导致数论，甚至数学的巨变。他也预见到素数变数不定方程的重要性。最简单的情况为两个素数变数的一次方程

$$ap+bq=c,$$

此处a,b,c为给定整数，要求p,q为素数的解。分别取$a=b=1$及$c=2n$，与$a=1,b=-1$及$c=2$，则得

$$2n=p+q\text{ 及 }2=p-q。$$

对于任意$n\geqslant3$，前者皆有奇素数解p,q就是猜想(A)。后者有无穷多组素数解答(p,q)就是孪生素数猜想，即存在无穷多对相差为2的孪生素数对。这两个猜想是姐妹问题，她们与黎曼猜想一起构成了希尔伯特第八问题。

在1912年，第五届国际数学家大会上，兰岛又将命题(A)与孪生素数猜想作为四个素数论中待解决的两个难题加以推荐(见[4])。又在1921年哥本哈根数学会上，哈代在其演讲中宣称猜想(A)的"困难程度是可以和任何数学中未解决的问题相比拟的"(见[5])。这么多大数学家瞩目哥德巴赫猜想，正是预见与期望这个问题作为推动数学发展的动力。

果然不出所料，在十九世纪素数论伟大成就的基础上，从1920年开始，哥德巴赫猜想的研究有了重大突破。伴随着这一问题本身成果的获得，一些新的数学概念与崭新的强有力的数学方法产生出来了，其意义远比这个问题本身的结果重要得多。哈代与李特伍德的"圆法"与依。维诺格拉朵夫的素数变数的指数和估计方法就是研究哥德巴赫猜想的产物（推动这两个方法产生的另一个问题为希尔伯特异常重视的华林问题）。这两个方法最终导致依。维诺格拉朵夫于1937年证明了"三素数定理"，即猜想(B)对于充分大的奇数成立。命(a,b)表示命题："每一充分大的偶数都是一个不超过a个素数的乘积与一个不超过b个素数的乘积之和"。布朗在对古老的埃拉多染尼氏筛法作了重大改进后，首先用于猜想(A)，并证明了(9,9)。这些强有力的数学方法的发展，不仅对数论，而且对不少数学分支都有重要应用。

早在三十年代，华罗庚就证明了几乎所有的偶数，猜想(A)成立、详言之，命不超过x，使(A)不成立的偶数个数为$E(x)$。则对于任何$c>0$皆有$E(x)=O(x/\log^c x)$。五十年代初，在他主持数学研究所工作时，高瞻远瞩地预见到哥德巴赫猜想的可能发展，亲自组织了这个问题的讨论班，由于他的坚强领导与富于见地的计划，使一系列重要的数论结果都出自中国数论学家之手(见[2])。特别在筛法与猜想(A)方面的成就，得到国内外高度评价。早在五十年代初，笔者就证明了(2,3)，首次打破了布赫夕塔布保持的1940年的记录(4,4)。六十年代初，潘承洞证明了(1,4)，大大改进了瑞尼的著名结果$(1,c)$，其中c是一个大常数。特别是陈景润在1966年，发表了(1,2)，被国际上称为"陈氏定理"，并被认为是"筛法发展的顶峰"(见[6])。看来，圆法与筛法均已山穷水尽，用它们几乎是不可能证明猜想(A)的。数学家殷切地期望新思想与新方法的产生。

处于这个时期，总结好以往的成就，使后来者能较快掌握以往的成就，少走弯路，继续前进，肯定是十分必要的。上述重要成就与方法，虽已散见于众多专著。但潘承洞与潘承彪

的专著却是全面系统论述哥德巴赫猜想的第一本著作，其出版引起国内外数学界的注目是可想而知的。国外正期待着其英文版早日问世(见[1,2])。

仅仅只用三百几十页篇幅，会面总结哥德巴赫猜想研究六十多年来的大量杰出成就，确是十分艰巨的事。两位作者出色地完成了写作任务。本书绝非材料的简单堆积，而是一个再创造的研究工作专著。本书是在假定读者已经了解初等数论与素数分布论的基础上撰写的。

本书第一，二章中，讲述了特征与高斯和后，即开门见山，引入朋比尼与罗斯关于列尼克与瑞尼的大筛法的重大改进的阐述。第三，四章讨论了ζ-函数与L-函数的性质，特别是它们的中值公式与零点分布性质。第五，六章即进入“园法”与素数变数指数和的估计方法的讨论，从而证明了“三素数定理”。对于素数变数指数和的估计，书中讲述了初等方法与分析方法，其中最初等的分析证明方法则是潘承彪给出的。书中对“三素数定理”给出了有效的与非有效的两种证明。所谓有效证明，即可以给出n_0，当$n>n_0$时，猜想(B)成立。第六章还包括了华罗庚关于猜想(B)的推广：任何充分大的奇数N均可表为$N=p_1+p_2+p_3^k$，此处k为任意给予正整数。第七章为赛尔贝格筛法，这里讲的是黎切尔特与朱尔开特的形式，即系数有明显表达式的精密筛法。第八章为关于算术级数素数定理重要的朋比尼—阿、维诺格拉朵夫中值公式。在不少素数论的问题中，这一公式可以用来代替未经证明的广义黎曼猜想。然后讲了潘承洞等建立的一个新的中值公式，一方面这一公式包有朋比尼—阿维诺格拉朵夫公式，另一方面可以用这一公式来统一处理一系列重要的问题，其中包括下一章讲的陈景润的两条重要定理(见[7])。这个中值公式的想法是潘承洞提出的。他的出发点是下面的恒等式

$$-\frac{L'}{L}=-\frac{L'}{L}(1-LG)-L'G=\left(-\frac{L'}{L}-F\right)(1-LG)-L'G+F-FLG$$

沃恩也独立地提出这个想法并加以发展。第九章为陈景润的两条著名定理，即“陈氏定理”与将偶数表示为两个素数之和的表法$\leqslant 7.928c(N)\frac{N}{\log^2 N}$。恰如上述，书中基于“潘氏公式”给出了这两条定理的证明，比原来的证明有实质性的化简。第十章再一次深入讨论L-函数的零点估计。第十一，十二两章，则研究哥德巴赫数(即使(A)成立的偶数)，其中包括沃恩与蒙哥玛利关于$E(x)$的进一步改进：存在$\varepsilon>0$使$E(x)O(x^{1-\varepsilon})$，陈景润与潘承洞首先给出ε的数值。作者还研究了小区间$[x,x+f(x)]$中哥德巴赫数的存在性问题，此处$f(x)=o(x)$。作者讲了凯蒂的结果：在黎曼猜想之下，取$f(x)=O(\log x)^2$)即可保证小区间中有哥德巴赫数。在ζ-函数的密度猜想之下或不作任何猜想，潘承洞提出了统一处理哥德巴赫数的方法。它包有现有的重要结果。书中阐述了这个方法。

书的最前面有一个详细的导论，阐述问题的历史及方法概要，指引读者对哥德巴赫问题研究的全貌有所了解。书末有一个经挑选过的详细而有用的参考文献。恰如彼得。肯指出：“书中每一章的材料都是很好地加以组织并具备一个好的导引。包有许多有价值的评述，指出真正困难所在及各种结果之间有启发性的内在联系。写作风格透澈并具启发性，诸定理的证明是秀美的。最近几年，在解析数论方面已出现了一系列很有影响的书(例如德文波特的“乘积数论”，蒙哥玛利的“乘积数论选论”与黎切尔特及哈贝斯坦的“筛法”)。这本书是这个文库的一个重要添加者。作为一个教程，本书不仅对中国初从事解析数论研究的数学家有重要影响，它的好的英文版本对西方世界亦具有同样的教益”(见[2])。这决非溢美之词，

两位作者是当之无愧的。

任何书都有一定的范围，本书未讨论史尼尔曼的整数“密率”概念，史尼尔曼结合他自己的密率及布朗筛法，于1930年证明了正整数>1，都是不超过c个素数之和，其中c为常数。这是第一个堆垒素数论定理，具有重大的历史意义，但用这个方法是达不到“三素数定理”的深度的，现在不讨论是可以的。本书未论及哥德巴赫问题的推广，将这一猜想与华林问题结合起来可以研究方程

$$N=p_1^k+\cdots+p_s^k$$

的各种可解性问题，其中$p_i(1\leqslant i\leqslant s)$为素数。还可以研究更为广泛的堆垒素数论问题。读者可以读华罗庚的优秀专著[8]。我们还可以在代数数域上建立类似的哥德巴赫猜想。三井孝美将“三素数定理”推广至任意代数数域(见[9])。另外，有兴趣阅读与本书有关的各重要原始文献的读者，请参阅笔者编辑的书(见[10])。

参考文献

[1] Kee Wai Lau, *Math. Rev*, 1984, h, 10064.

[2] P.Shiu, *Zent*、*für Math*, 4, 1984, 7, 10040.

[3] 康斯坦西·瑞德，希尔伯特，上海科学技术出版社，1982.

[4] E.Landau, Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion, *Proc. 5-th Intern Congs*、*Math*, *camb*, 1, 1912, 93—108.

[5] G.H.Hardy, Golbrach's conjecture, *Math*、*Tid*, B, 1922, 1—16.

[6] H.Halberstam and H.E.Richert, Sieve Methods, Acad.Press, 1974.

[7] Pan cheng Dong (潘承洞), A new mean value theorem and its applications, "Recent progress in analytic number theory" I, Edilid by H.Halberstam and C.Hooley, Acad.press, 1981, 275—288.

[8] Hua Loo Keng (华罗庚), Additive theory of prime numbers, Trud. Inst. Mat. Steklov, 22, 1947.

[9] T.Mitsui (三井孝美), On the Goldbach problem in an algebraic number field, I. II, *J. Math. Soc. Japan*, 1960, 290—372.

[10] Wang Yuan (王元), Goedbach conjecture, *World Sci. pub. comp*, 1984.