哥德巴赫猜想与潘承洞（续二）

刘建亚

偶数哥德巴赫猜想

很遗憾，偶数的哥德巴赫猜想到现在都没有得到证明。但是，数学家们从各个方向逼近这个猜想，并且取得了辉煌的成就。我将介绍研究偶数的哥德巴赫猜想的四个途径，其中几乎每个途径都有潘老师的工作。这四个途径分别是：殆素数，例外集合，小变量的三素数定理，以及几乎哥德巴赫问题。

途径一：殆素数

殆素数就是素因子个数不多的正整数。现设 N 是偶数，虽然现在不能证明 N 是两个素数之和，但是可以证明它能够写成两个殆素数的和，即 N=A+B，其中 A 和 B 的素因子个数都不太多，譬如说素因子个数不超过 10。现在用犳 a+b 狚来表示如下命题：每个大偶数 N 都可表为 A+B，其中 A 和 B 的素因子个数分别不超过 a 和 b。那么，哥德巴赫猜想就可以写成犳 1+1 狚。在这一方向上的进展都是用所谓的筛法得到的。

1920 年，布朗（V. Brun）首先取得突破性的进展，证明了命题犳 9+9 狚。后续进展如下：哈德马赫（H. Rademacher），1924，犳 7+7 狚；艾斯特曼（T. Estermann），1932，犳 6+6 狚；里奇（G. Ricci），1937，犳 5+7 狚；布赫施塔伯（A. A. Buchstab），1938，犳 5+5 狚；布赫施塔伯，1940，犳 4+4 狚；库恩（P. Kuhn），1941，a+b 小于或等于 6。1950 年，菲尔兹奖得主塞尔伯格（A. Selberg）改进了筛法。王元 1956 年证明了犳 3+4 狚。另一个俄国数学家阿·依·维诺格拉多夫（A. I. V inogradov）1957 年证明了犳 3+3 狚，王元 1957 年进一步证明了犳 2+3 狚。

上述结果有一个共同的特点，就是 a 和 b 中没有一个是 1，即 A 和 B 没有一个是素数。所以，要是能证明 a=1，再改进 b，那就是一件更了不起的工作。林尼克 1941 年提出来的大筛法使得这项工作成为可能。后来，林尼克的学生、匈牙利数学家兰易（A. Rényi）深入地研究了大筛法，并在 1948 年证明了命题犳 1+b 狚。当时，没有人知道 b 究竟有多大。用王元的话说，这个 b 是个天文数字。这个 b 的值依赖于素数在算术级数中平均分布的水平，即另外一个重要常数 θ 的值。

此后便是潘承洞的伟大工作。1962 年，28 岁的潘承洞证明了 θ 可以取 1/3，从而推出命题犳 1+5 狚，一下子把 b 从天文数字降到了 5。这是一个决定性的突破。王元改进筛法之后，证明了犳 1+4 狚。同一年，潘又得到了一个更大的 θ=3/8。从 3/8 出发，潘也证明了犳 1+4 狚。然后，布赫施塔伯证明了 3/8 蕴涵命题犳 1+3 狚，即从潘承洞的 θ=3/8 可以推出命题犳 1+3 狚来。以上结果表明，θ 做得越大，b 就越小。但 θ 不能太大，其可能的最大值是 1/2；比 1/2 再大，均值定理的形式就会发生变化，所以可以认为 1/2 是最佳值。1965 年，θ 的取值达到了理论最佳值 1/2，这个定理就叫做庞比埃里–维诺格拉多夫（E. Bombieri——A. I. Vinogradov）定理，由庞比

埃里和阿·依·维诺格拉多夫分别独立证明。庞比埃里是意大利数学家,因为这项工作获得了菲尔兹奖。虽然庞比埃里证明了 θ 能取到 1/2,但是他未能证明狖 1+2 狚。

命题狖 1+2 狚的证明是陈景润完成的。1966 年,陈景润在《科学通报》上刊登了命题狖 1+2 狚证明的简报,但此后由于“文化大革命”开始,《科学通报》与《中国科学》随即停刊。直到 1973 年《中国科学》复刊之后,陈景润狖 1+2 狚证明的全文才得以发表。

以上是沿着殆素数方向研究哥德巴赫猜想的进展。直到现在,狖 1+2 狚还是最好的结果。虽然突破狖 1+2 狚就会得到狖 1+1 狚,但是大家公认再用筛法去证明狖 1+1 狚几乎是不可能的,只有发展出革命性的新方法,才有可能证明狖 1+1 狚。所以,哈伯斯坦(H. Halberstam)与里切特(H. E. Richert)在《筛法》(Sieve Methods) 的最后一章指出:“陈氏定理是所有筛法理论的光辉顶点。”

途径二:例外集合

在数轴上取定大整数 x,再从 x 往前看,寻找使得哥德巴赫猜想不成立的那些偶数,即例外偶数。x 之前所有例外偶数的个数记为 E(x)。我们希望,无论 x 多大,x 之前只有一个例外偶数,那就是 2,即只有 2 使得猜想是错的。这样一来,哥德巴赫猜想就等价于 E(x) 永远等于 1。当然,直到现在还不能证明 E(x)=1;但是能够证明 E(x)远比 x 小。在 x 前面的偶数个数大概是 x/2;如果当 x 趋于无穷大时,E(x)与 x 的比值趋于零,那就说明这些例外偶数的密度为零,即哥德巴赫猜想对于除 2 以外所有的偶数成立。这就是例外集合的思路。

维诺格拉多夫的三素数定理发表于 1937 年。第二年,在例外集合这一途径上,就同时出现了四个证明,其中包括华罗庚的著名定理。

现在,我每个月都要会见几个业余搞哥德巴赫猜想的人,其中不乏有人声称“证明”了哥德巴赫猜想在概率意义下是对的。实际上他们就是“证明”了例外偶数是零密度,而这个结论华老早在 60 年前就已经证明出来了。

然而 1938 年 E(x)上界的世界记录基本上是 x 的 1 次方,与 E(x)的上界是 x 的零次方相差很远。因此降低该上界中 x 的方次将是一件很重要的事。1975 年,蒙哥马利(H. L. Montgomery)与沃恩证明存在一个小于 1 的正数 δ,使得 E(x)的上界是 x 的 δ 次方。1979 年,潘承洞与陈景润合作,证明了 δ 可以取到 0.99。按照陈和潘的思路,后来有很多人都进行了改进 δ 的值的研究工作。目前最好的结果是李红泽 2000 年得到的,δ 可以取 0.92。

在广义黎曼猜想之下,哈代和李特伍德证明了 δ 可取 1/2。就是说,即使能够证明广义黎曼猜想,我们也就不能进而推出哥德巴赫猜想。最近,我与叶扬波合作,利用广义黎曼猜想和 L-函数零点分布的统计规律猜想,进一步推进了例外集合的上界,证明了 E(x) 不超过 log x 的平方。请注意,与 x 的任何 δ 次方相比,log x 增长都是很慢的。因此我们的结果指出,E(x)小于 x 的任何 δ 次方。

但是我们毕竟没能证明哥德巴赫猜想。到目前为止,猜想研究的现状仍然可以用潘承洞生前的一句话来概括,即“哥德巴赫猜想甚至没有一个假设性的证明”。哈代 1921 年在皇家学会演讲时指出:“哥德巴赫猜想似乎不能用布朗的方法(即筛法)来证明。”他说:“能够最终证明猜想的方法,应该与我与李特伍德的方法类似。我们不是在原则上没有成功,而是在细节上没有成功。”哈代同时还指出,不是圆法无力,而是他与李特伍德的分析能力不够。我认为,更高阶的 L-函数应该是哈代和李特伍德所需要的分析工具;或许,将高阶的 L-函数融入圆法就会最终证明哥德巴赫猜想。■