第 41 卷第 3 期
1998 年 5 月
数 学 学 报
ACTA MATHEMATICA SINICA
Vol.41, No. 3
May, 1998

潘 承 洞*
——生平与工作简介——

王 元
(中国科学院数学研究所 北京 100080)

潘承洞于 1934 年 5 月 26 日生于江苏省苏州市一个旧式大家庭中，他的父亲潘子起，号艮斋. 母亲高嘉懿，江苏省常熟市人，出身贫苦家庭，不识字. 他们有一女两子. 父亲的忠厚，母亲的劳动妇女的优良品德与严格管教，使子女能够健康成长，激励他们奋发图强.

潘承洞在 1946 年 8 月考入苏州振声中学初中，1949 年毕业后考入苏州桃坞中学高中. 潘承洞小时候十分爱玩，棋、牌、足球、乒乓球、台球，……样样都喜欢，玩得高兴时就什么都忘了. 因此，上小学时曾留级一年. 读高中时，教他数学的是上海、苏州地区有名望的祝忠俊先生. 一次，他发现《范氏大代数》一书中一道有关循环排列题的解答是错的，并作了改正. 这使得教了 20 多年书而忽略了这一点的祝老师对他不迷信书本、善于发现问题、进行独立思考的才能十分赞赏. 潘承洞在 1952 年高中毕业，同年考入北京大学数学力学系. 当时，全国高校刚调整院系，许多著名学者，如江泽涵、段学复、戴文赛、闵嗣鹤、程民德、吴光磊等，为他们讲授基础课. 以具有许多简明、优美的猜想为特点的数学分支一数论，在历史上一直使各个时期的数学大师着迷. 但是，它们中的大多数仍是未解决的问题. 这些猜想深深地吸引着潘承洞. 在闵嗣鹤循循善诱的引导下，他选学了解析数论专门化. 1956 年大学毕业，留北京大学数力系工作. 翌年二月，成为闵嗣鹤的研究生.

20 世纪 50 年代前后是近代解析数论的一个重要发展时期，为了研究数论中的著名猜想，一些重要的新的解析方法，如大筛法、黎曼 ζ 函数与狄利克雷 L 函数的零点分布、塞尔伯格筛法等，相继提出，成为解析数论界研究的中心. 闵嗣鹤教授极有远见地为潘承洞确定了研究方向：L 函数的零点分布，及其在著名数论问题中的应用. 在学习期间，他还有幸参加了华罗庚教授在中国科学院数学研究所主 持的哥德巴赫猜想讨论班，并与陈景润、王元等一起讨论，互相学习与启发. 在闵嗣鹤的指导下，潘承洞在大学与研究生期间完成的主要论文有："论算术级数中之最小素数"[2,3]和"堆垒素数论的一些新结果"[4]. 1961 年 3 月起在山东大学数学系任助教. 同年与李淑英结婚，有一女. 李淑英现为山东大学光电材料研究所高级工程师. 1962 年，潘承洞升任讲师.

到山东大学后的短短几年中，他发表的主要论文有："表大偶数为素数与殆素数之和"[6]，"表大偶数为素数与一个不超过四个素数的乘积之和"[7]，以及"Ю. В. Линник 大筛法的一个新应用"[8]. 这些工作对哥德巴赫猜想与算术数列中最小素数这两个著名问题的研究做出了重要贡献，受到华罗庚、闵嗣鹤及国内外同行的高度评价. 1964 年，他当选为山东省青年联合会副主席.

1966 年开始的"文化大革命"，严重地搅乱了科学研究，尤其是基础理论研究的正常秩

收稿日期： 1997-01-14，接受日期： 1997-05-23

*本文较多取材于于秀源"潘承洞"，见"中国现代科学家传记"，第六集，科学出版社，1994

序．潘承洞无法进行他的研究工作．1973 年，陈景润关于哥德巴赫猜想的著名论文发表后，潘承洞又开始了解析数论研究．这一时期工作的代表性论文是“一个新的均值定理及其应用”[16]．他的主要贡献是提出并证明了一类新的素数分布的均值定理，给出了这一定理对包括哥德巴赫猜想在内的许多著名数论问题的重要应用．1979 年 7 月，在英国达勒姆举行的国际解析数论会议上，潘承洞应邀以此为题作了一小时报告，受到华罗庚和与会者的高度评价．1982 年，潘承洞发表了论文“研究 Goldbach 猜想的一个新尝试”[18]，提出了与已有研究截然不同的方法，对哥德巴赫猜想作了有益的探索．1988—1990 年间，他与潘承彪以“小区间上的素变数三角和估计”为题发表了三篇论文[19-21]，提出了用纯分析方法估计小区间上的素变数三角和，第一次严格证明了小区间上的三素数定理，这是他对论文[4]的进一步完善和改进．

1981 年出版了潘承洞与潘承彪合著的《哥德巴赫猜想》，对猜想的研究历史、主要研究方法及研究成果作了系统的介绍与有价值的总结，得到了国内外数学界的一致好评[32]．他们还合著了《素数定理的初等证明》(1988)、《解析数论基础》 (1991)、《初等代数数论》(1991) 及《初等数论》(1992)．潘承洞与于秀源合著了《阶的估计》(1983)．潘承洞还写了科普读物《素数分布与哥德巴赫猜想》(1979)．这些著作对我国数论的科研、教学和人才培养都起了很好的作用．

自 1978 年以来，潘承洞已经指导培养了 10 多名博士研究生和近 20 名硕士研究生，其中包括我国首批博士学位获得者之一于秀源．他培养的研究生工作在全国各地，已成为我国数论界的重要新生力量．从 80 年代中期开始，潘承洞和同事们在山东大学开始建立数论应用的研究队伍，并培养这方面的研究生．

1978 年 5 月，潘承洞晋升为教授．1981 年加入中国共产党．1979 年 10 月到 1984 年 6 月，任山东大学数学系主任．1984 年 7 月起，任山东大学数学研究所所长．1984 年 7 月至 1986 年 12 月，任山东大学副校长．1986 年底，被任命为山东大学校长．1991 年，潘承洞当选为中国科学院学部委员．潘承洞还担任了一些社会工作，现任山东省科协主席，中国数学会副理事长，山东省自然科学基金委员会副主任，国务院学位委员会数学学科评议组成员，《数学年刊》常务编委．他还参加了国家自然科学基金委员会数学学科评审的领导工作．

潘承洞是第五、六、七、八届全国人大代表．1978 年，潘承洞获全国科学大会奖并获全国科技先进工作者称号；1979 年被授予全国劳动模范称号；1982 年，因对哥德巴赫猜想研究中的突出贡献，与陈景润、王元一起获国家自然科学奖一等奖；1984 年，被评为我国首批有突出贡献的中青年专家；1988 年获山东省首批专业技术拔尖人才荣誉称号．

潘承洞在解析数论研究中所取得的成就主要有以下几个方面．

1 算术数列中的最小素数

设 a 与 q 是两个互素的正整数，$a < q$，$q > 2$．以 $P(q, a)$ 表示算术数列 $a + kq$ ($k = 0, 1, 2, \cdots$) 中的最小素数．一个著名的问题是要证明

$$P(q, a) \ll q\log^2 q.$$

1944 年，Ю. В. 林尼克(Линник)首先证明存在正常数 λ，使得

$$P(q, a) \ll q^{\lambda}.$$

这只是一个定性结果，且证明很复杂与冗长．1954 年，K. A. 罗托斯基(Родосский)才给了一

个较简单的证明，但 P·吐朗(Turán)在他的书末曾提及罗托斯基的方法并未给出 λ 的数值的任何消息，并指出如果改用他自己的方法，很可能定出 λ 来，但始终未见有文章发表. 1957 年，潘承洞在他的两篇论文[2,3]中，通过对 L 函数性质的深入研究，本质上改进了林尼克的证明，明确指出 λ 主要依赖于和 L 函数有关的三个常数，具体给出了计算 λ 的方法. 他先后得到了

$$\lambda < 10^4 \text{与} \lambda < 5448.$$

林尼克亲自为他的文章写了长篇评论[33]. 此后所有改进常数 λ 数值的工作都是在潘承洞所建立的这一框架下得到的. 30 多年来的主要改进是：

$$\lambda \leq 770, 550, 168, 80, 20, 11.5, 8, 5.5.$$

它们分别是由陈景润，M. 尤梯拉(Jutila)，陈景润，M. 尤梯拉，S. 格拉汉姆(Graham)，陈景润与刘健民，王炜，D. R. 黑斯一布朗(Heath-Brown)得到的.

2 哥德巴赫猜想，大筛法，以及素数分布的均值定理

为了研究著名的哥德巴赫猜想一每一个大于 2 的偶数一定是两素数之和，人们提出先研究这样一个较简单的命题：存在一个正整数 r，使得每一个充分大的偶数一定是一个素数与一个不超过 r 个素数的乘积的和. 这一命题简记为 $\{1, r\}$. 这样，哥德巴赫猜想基本上就是命题 $\{1,1\}$. 在哥德巴赫猜想提出 200 多年后，A. 兰恩易(Rényi)通过对林尼克的大筛法的重大改进，结合 V. 布伦(Brun)筛法，证明了命题 $\{1, r\}$. 这是一个重大的开创性工作. 但是由于证明方法上的缺点，他的结果是定性的，即不能定出 r 的有效值. 兰恩易证明的关键实质上隐含地就是要证明如下的素数分布均值定理：存在正数 η，使得对任意的正数 B 及 ε 有

$$\text{东省} \sum_{d \leq x^{\eta-\varepsilon}} \max_{(l, d)=1} \left| \pi(x; d, l) - \frac{1}{\varphi(d)} \pi(x) \right| = O\left(\frac{x}{(\log x)^B} \right), \tag{1}$$

其中与“O”有关的常数依赖于 ε 与 B，$\varphi(d)$ 是欧拉函数，$\pi(x; d, l)$ 表示满足条件

$$p \leq x, \qquad p \equiv l \pmod d$$

的素数 p 的个数，并且 $\pi(x) = \pi(x; 1, 1)$. 兰恩易把(1)式左边的和式转换为估计一个对 L 函数零点求和的三重和式. 这种和式的估计是很困难的. 他通过对大筛法的改进，进一步改进 L 函数零点分布的结论，从而直接估计出这个三重和式的最内层和，然后，再由显然方法估计这个三重和式. 由此，他证明了存在正数 η 使得(1)式成立，进而推出存在正整数 r 使命题 $\{1, r\}$ 成立. 由于兰恩易只是有效地估计最内层和，所以无法有效地给出 η 和 r 的值. 1962 年，潘承洞对大筛法与 L 函数零点分布的结论做了进一步改进，使他得以对三重和式内的二重和式作整体的有效估计，他证明了当 $\eta = 1/3$ 时，(1)式成立，进而推出命题 $\{1,5\}$ 成立. M. B. 巴邦(Варбанн)独立地证明过 $\eta = 1/6$ 时，(1)成立. 但并未给出在哥德巴赫问题上的应用. 这是一个出人意料的重大进展. 1963 年，他又与巴邦独立地证明了当 $\eta = 3/8$ 时，(1)式成立，并进而证明了命题 $\{1,4\}$. 1965 年，E. 邦别里(Bombieri)和 A. И. 维诺格拉多夫(Виноградов)各自独立地通过对大筛法的最佳改进，得以从整体上估计上述三重和式，从而证明了当 $\eta = 1/2$ 时(1)成立，这是邦别里获得菲尔兹奖的主要工作. H. 哈伯斯塔姆(Halberstam)在评论邦别里的这一工作时指出[34]：潘承洞的结果是“真正杰出的工作”. 1983 年，E.

福利(Fouvry)和H·伊万尼斯(Iwaniec)指出[35]：邦别里一维诺格拉多夫定理是在林尼克、兰恩易、潘承洞、巴邦等人的“开创性工作的基础上得到的”.

1973年，潘承洞提出并证明了一类新的素数分布均值定理，它是邦别里一维诺格拉多夫定理的重要推广与发展，能容易地解决后者所不能直接克服的困难. 利用这一新的均值定理不仅给出了陈景润定理一命题 $\{1,2\}$ 的最简单的证明，成为以后研究哥德巴赫猜想型问题的基础，而且在不少著名解析数论问题中有重要应用，特别是1983年黑斯一布朗在关于原根的E·阿廷(Artin)猜想的论文中应用它得到了重要成果. 1988年，H. E. 理歇特(Richert)在纪念华罗庚国际数论与分析会议上发表的综述性论文[36]中，把邦别里一维诺格拉多夫定理，陈景润定理，以及潘承洞的新均值定理称为这一领域的三项最重要的成果.

3 小区间上的素变数三角和估计与小区间上的三素数定理

1937年，维诺格拉多夫证明了著名的三素数定理：每一充分大的奇数一定是三个素数的和. 这就基本上解决了1742年哥德巴赫所提出的猜想的一部分：每个大于5的奇数都是三个素数之和. 维诺格拉多夫的主要贡献在于得到了素变数三角和

$$\sum_{p\leq x} e^{2\pi i\alpha p}$$

的非显然估计，其中 α 为实数，p 为素数变数. C. B. 哈赛格庐乌(Haselgrove)在1951年首先考虑了这样的问题：每个充分大的奇数一定是三个几乎相等的素数的和. 他宣布了一个结果但没有证明. 精确地说，上述问题可以这样表达：存在正数 $c<1$，使对每个大奇数 N，素变数 p_1，p_2，p_3 的不定方程

$$\begin{cases} N = p_1 + p_2 + p_3, \\ \dfrac{N}{3} - N^{c+\varepsilon} \leq p_j \leq \dfrac{N}{3} + N^{c+\varepsilon}, \quad j = 1,2,3 \end{cases} \tag{2}$$

必有解. 其中 ε 为任意的正数. 这就是小区间上的三素数定理. 解决这一定理的关键是估计小区间上的素变数三角和

$$\sum_{x-A<p<x} e^{2\pi i\alpha p}, \tag{3}$$

其中 $2\leq A\leq x$. 维诺格拉多夫曾经给出了三角和(3)的一个非显然估计，他的方法本质上是筛法. 但是，他的结论不足 以解决这一问题. 1959年，潘承洞用分析方法给出了(3)式的非显然估计，再结合维诺格拉多夫的估计，证明了不定方程(2)当 $c=160/183$ 时有解，且有解数的渐近公式. 虽然在他的证明中有缺陷，但他的方法为以后研究小区间素变数问题的论文经常运用. 1988年起，潘承洞与潘承彪继续发展了他的思想，发表了三篇论文，不仅完善了1959年的结果，而且全面完整地提出了用纯分析方法来估计小区间素变数三角和(3)，进而相继证明了当 $c=91/96$，$2/3$ 时(2)有解，且有解数的渐近公式. 这些结果后来进一步为贾朝华、展涛所改进. 潘承洞在这些论文中提出的思想、方法，及改进圆法的应用，在研究一些解析数论问题中，看来还有进一步发展的潜力.

4 哥德巴赫数的例外集

凡可以表示为两个素数之和的偶数称为哥德巴赫数. 命 $E(x)$ 表示不超过 x 的非哥德巴

赫数的偶数个数．1975 年，H．L．蒙哥马利(Montgomery)与 R．C．沃恩(Vaughan)证明了：存在 $\delta>0$ 使

$$E(x)=O(x^{1-\delta}),$$

此处与“O”有关的常数依赖于 δ．1979 年陈景润与潘承洞首次指出 δ 是可以计算的，并给出估计 $\delta>0.01$．

5　大筛法及其应用

1963 年，潘承洞证明了下面的结果：命 $k=\frac{\log q}{\log A}+1$，此处 q 无平方因子．若 $k\leq\log^3 A$，则对于满足 $A<p\leq 2A$ 及 $(p,q)=1$ 的所有素数 p，除了不超过 $A^{1-\varepsilon}(\varepsilon>0)$ 个属于模 $D=pq$ 的例外 L-函数外，当 $\chi_D(n)$ 对 p 本原时，$L(s,\chi_D)$ 在区域

$$\sigma>1-\frac{\frac{2}{q}-\varepsilon}{k}\cdot\frac{\log D}{4\log D+2\log(|t|+1)},\quad |t|\leq T$$

内不为零．

这是兰恩易结果的改良，在他原来的结果中需有限制 $|T|\leq\log^3 D$，而这里 T 是无限制的．由这一估计可得下面的应用：命 $N(p,k)$ 表示模 p 的最小 k 次正非剩余，此处 $A<p\leq 2A$．则除了不超过 $A^{1-\varepsilon}$ 个例外素数 p 之外，恒有 $N(p,k)=O((\log A)^{18+\varepsilon})$ 其中与“O”有关的常数依赖于 ε．

除解析数论外，潘承洞的研究领域还涉及其他一些数学分支及其应用．50 年代末，在广义解析函数论及其在薄壳上的应用，数论在近似分析中的应用等方面；1970 年前后在样条插值及其应用，滤波分析及其应用等方面，均做了一些工作．

潘承洞在山东大学数学系任教的 30 多年中，始终在教学第一线，为大学生、研究生开设了 10 多门课程，如数学分析、高等数学、实变函数论、复变函数论、阶的估计、计算方法、初等数论、拟保角变换、素数分布、堆垒素数论、哥德巴赫猜想，等等．他对教学一贯认真负责．他讲解生动，方法灵活，条理清楚，逻辑性强，善于深入浅出地启发学生去理解和掌握课程的要点和难点，深受学生的欢迎．在专心致志于教学、科研的同时，他还积极地和同事们一起为山东大学数学系和山东大学的建设与发展做出了贡献．

(I) 潘承洞论文目录

1 论 $\sigma(n)$ 与 $\varphi(n)$．北京大学学报，1956，3：303－322

2 On the least prime in an arithmetic progression．科学记录(新辑)，1957，1：311－313

3 论算术级数中之最小素数．北京大学学报，1958，4：1－34

4 堆垒素数论的一些新结果．数学学报，1959，9：315－329

5 On the numerical integration of a kind of multiple integrals．科学记录(新辑)，1959，11：334－337

6 О представлении чётных чисел в виде суммы простого и почти простого числа．Sci Sin，1962，11：873－888

7 О представлении чётных чисел в виде суммы простого и непревосходящего 4 простых произведения．Sci Sin，1963，12：455－473

8 Новые применения “Большого решета” Ю．В．Линника．Sci Sin，1964，13：1045－1053

9 关于大筛法的一点注记及其应用．数学学报，1963，2：263－268

10 O cреднем значеннии к—й степени числе классов для мнимого квадратичного подя. 1964，737—738

11 On the zeroes of the zeta function of Riemann. Sci Sin，1965，2：303—305

12 (与丁夏畦与王元合作). On the representation of every large even integer as a sum of a prime and an almost prime. Sci Sin，1975，5：599—610

13 (与丁夏畦合作). 一个均值定理. 数学学报，1975，4：254—262；更正：数学学报，1976，3：217—218

14 (与陈景润合作). Goldbach 数的例外集. 中国科学，1980，2：219—232

15 Goldbach 数. 科学通报，数理化专辑，1980，71—73

16 A new mean value theorem and its applications. 见 Recent progress in analytic number theory. Vol. I(Durham)，1981，275—287

17 一个三角和的估计. 山东大学学报(自然科学)，1982，4：19—23

18 A new attempt on Goldbach conjecture. China Ann Math，1982，3：555—560

19 (与潘承彪合作). On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (I). Sci Sin，Ser A，1989，32：408—416

20 (与潘承彪合作). On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (II). Sci Sin，Ser A，1989，32：641—653

21 (与潘承彪合作). On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III). China Ann Math，B，1990，11：138—147

(II) 潘承洞专著目录

22 (与潘承彪合作). 哥德巴赫猜想. 科学出版社，1981

23 (与潘承彪合作). 素数定理的初等证明. 上海科学技术出版社，1988

24 (与潘承彪合作). 解析数论基础. 科学出版社，1991

25 (与潘承彪合作). 初等代数数论. 山东大学出版社，1991

26 (与潘承彪合作). 初等数论. 北京大学出版社，1992

27 (与于秀源合作). 阶的估计. 山东科学技术出版社，1983

28 素数分布与哥德巴赫猜想. 山东科学技术出版社，1979

参 考 文 献

29 РодосскийК А. О наименьшем простом в арифметическойгрофрессии. *Matem* Сб，1954，2：331—356

30 Turan P. Eine neue methode in der analysis und deren anwendungen. Akad Kiado，Budapest，1953

31 王元. 哥德巴赫猜想研究. 黑龙江教育出版社，1987

32 王元. 评潘承洞. 潘承彪著“哥德巴赫猜想”. 数学进展，1987，16：207—210

33 Linnik Yu V. Math Reviews. 1959，3，22(♯ 2292).

34 Halberstam H. Math Reviews. 1970，33(♯ 5590).

35 Fouvry E，Iwaniec H. On a theorem of Bombieri-Vinogradov type. Mathematika，1980，27：135—172

36 Ritchert H E. Aspects of the small sieve. International symposium in memory of Hua Loo. Keng，Vol. 1，Springer-Verlag and Science Press，1988，235—248